PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN SISI GRAF KIPAS MELINGKAR BERKEPALA GANDA

Winda Sari*), Nurdin, Jusmawati
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin
Jln. Perintis Kemerdekaan, Makassar, Indonesia, Kode Pos 90245

THE TOTAL EDGE IRREGULARITY STRENGTH OF DOUBLE HEADED CIRCULAR FAN GRAPH

Winda Sari*), Nurdin, Jusmawati
Departement of Mathematic, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Hasanuddin University
Perintis Kemerdekaan Street, Makassar, Indonesia, Post Code 90245

ABSTRAK

Misalkan G adalah suatu graf sederhana. Suatu pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ disebut pelabelan-k total tidak teratur sisi pada G jika untuk setiap dua sisi yang berbeda pada E berlaku $wt(uv) \neq wt(ux)$ dimana $wt(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$. Bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur sisi disebut nilai total ketidakteraturan sisi pada graf G, dinotasikan dengan $tes(G)$. Penentuan nilai total ketidakteraturan sisi dilakukan melalui batas bawah dan batas atas $tes(G)$.

Berdasarkan batas bawah dan batas atas tes untuk graf kipas melingkar berkepala ganda $(DHF(n))$ diperoleh

$$tes(DHF(n)) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \text{untuk } n \geq 4.$$

Kata Kunci : *Graf Kipas Melingkar Berkepala Ganda, Pelabelan Total; Ketidakteraturan Sisi,Nilai Total Ketidakteraturan Sisi.*

ABSTRACT

For a simple graph G with the vertex set V and the edge set E. A labeling $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ is called an edge irregular total k-labeling of G if for any two different edges x and y in E we have $wt(uv) \neq wt(ux)$ where $wt(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$. The smallest positive integer k such that G has an edge irregular total k-labeling is called the total edge irregularity strength of G, denoted by $tes(G)$. The total edge irregularity strength determine with through the lower boned and upper boned of $tes(G)$.

Based on the lower boned and upper boned for of tes double headed circular fan (DHF (n)) is obtained

$$tes(DHF(n)) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \text{for } n \geq 4.$$

Keywords : *Double Headed Circular Fan Graph, Total Edge Irregular Labeling, Total Edge Irregularity Strength.*

I. PENDAHULUAN

Pada abad ke – 18, Euler memperkenalkan dasar pengembangan teori graf. Pada saat itu di kota Koningsberg, terdapat suatu sungai yang membelah kota menjadi empat daratan yang terpisah. Daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Warga kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Euler membuktikan, dengan menggunakan suatu bentuk representasi tertentu, bahwa hal itu tidak mungkin dilakukan. Bentuk representasi itu berkembang menjadi teori graf yang dikenal saat ini.

*Penulis koresponden

windasari222@gmail.com

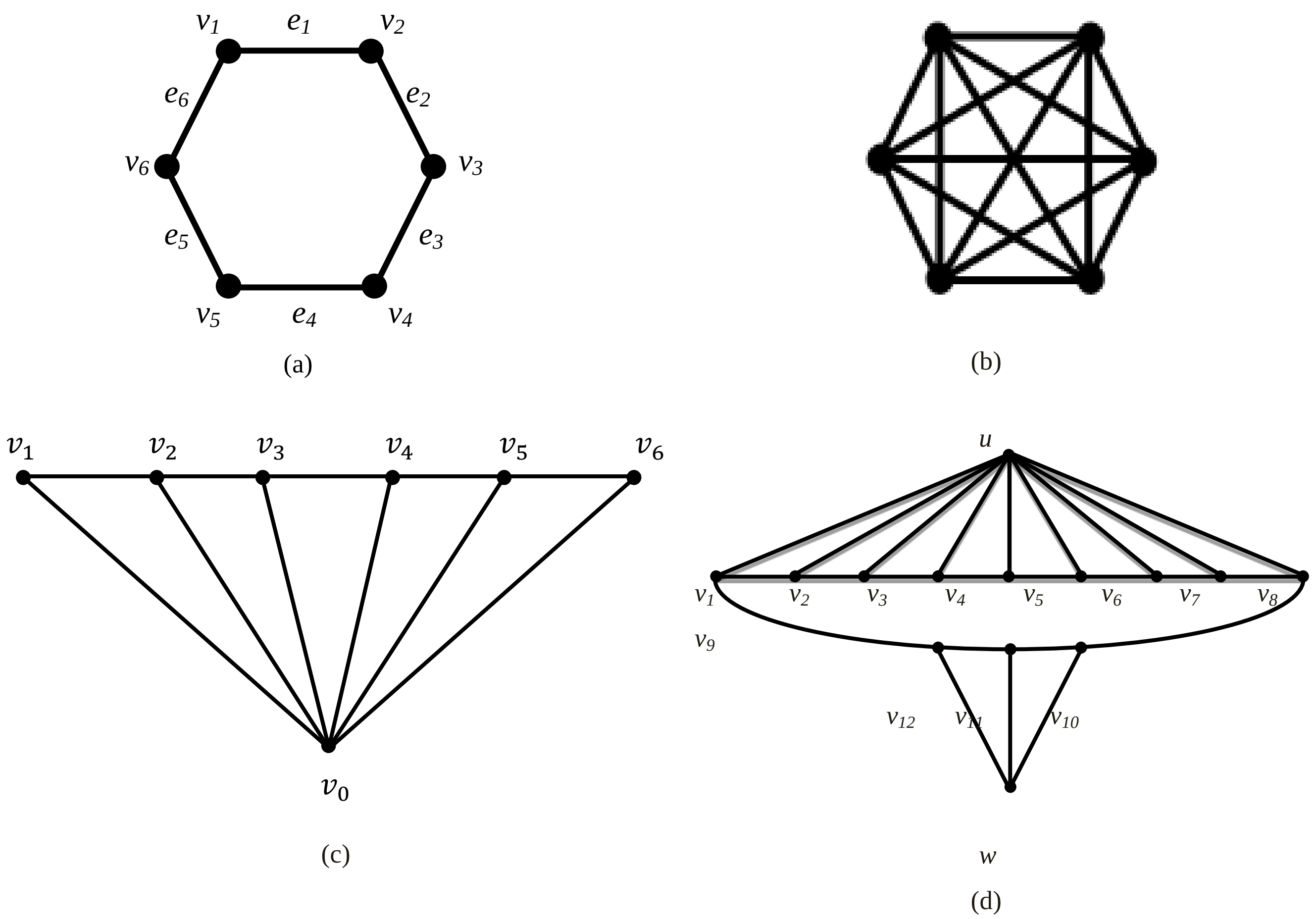
Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bilangan asli yang disebut label. Masalah pelabelan dalam teori graf mulai dikembangkan pada tengah tahun 1960-an. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970).

Pelabelan elemen graf merupakan suatu pemetaan dengan domain berupa elemen dari graf tersebut terhadap himpunan bilangan bulat positif. Domain yang sering ditemui berupa himpunan titik atau sisi. Suatu pelabelan dengan domain berupa himpunan titik dari suatu graf disebut *pelabelan titik*. Sedangkan pelabelan dengan domain himpunan sisi suatu graf disebut *pelabelan sisi*. Apabila domain dari pemetaan tersebut adalah $V \cup E$ maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Jenis Graf

Jenis graf yang dibahas pada tugas akhir ini antara lain graf lingkaran, graf lengkap, graf kipas , dan graf kipas berkepala ganda. Sebelum membahas mengenai graf kipas melingkar berkepala ganda, akan dibahas terlebih dahulu mengenai graf lingkaran. Graf lingkaran adalah graf terhubung yang semua titiknya berderajat 2. Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n.



Gambar 1. Graf lingkaran C_6 (a), graf lengkap K_6 (b), graf kipas F_6 (c), dan grah kipas berkepala ganda $DHF(12)$ (d)

Graf lengkap K_n adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. Setiap K_n berderajan $n-1$.

*Penulis koresponden

windasari222@gmail.com

Graf kipas F_n adalah graf hasil join dari graf lintasan P_n dan graf K_1 dengan $n \geq 3$. Jika $v_0 \in K_1$ dan $v \in P_n$ maka sisi $v_0 v_1 \in E(F_n)$ disebut jari-jari dari F_n.

Graf kipas melingkar berkepala ganda DHF(n) diperoleh dengan manambahkan titik u dan w pada graf C_n kemudian menambahkan sisi $(v_i u), i = 1, 2, 3, \dots, n-3$ dan $(v_i w), i = n-2, n-1, n$ dimana $v_i \in V(C_n)$ dan $u, w \notin V(C_n)$.

B. Pelabelan Total Tidak Teratur Sisi

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf da $f: V \cup E \to \{1, 2, \cdots, k\}$n merupakan suatu pelabelan total pada G. Bobot sisi $xy \in E$ atas pelabelan f tersebut didefinisikan sebagai jumlah label sisi xy dan label kedua titik ujung xy, yaitu $wt(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$.

Nilai total ketidakteraturan sisi (total edge irregularity strength) dari G, dinotasikan dengan $tes(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan k tidak teratur sisi.

III. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan di uraikan nilai total ketidakteraturan sisi pada graf web.

Teorema 1

Misalkan DHF(n) adalah graf kipas melingkar berkepala ganda dengan $n \geq 4$, *maka*

$$tes\big(DHF(n)\big) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$$

Tahap 1 : Membuktikan bahwa $tes\big(DHF(n)\big) \geq \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$.

Bukti : Untuk suatu pelabelan-λ total sisi graf $DHF(n) = (V, E)$. Misalkan $E\big(DHF(n)\big) = \{e_i | i = 1, 2, \dots, |E|\}$ dan $V\big(DHF(n)\big) = \{v_j | j = 1, 2, \dots, |V|\}$, karena $wt(e_1) = \lambda(v_1) + \lambda(e_1) + \lambda(v_2)$ dimana v_1, v_2 bertetangga dengan $e_1$dan label terkecil adalah 1 maka bobot terkecil dari graf $DHF(n)$ adalah 3. Bobot sisi pada graf $DHF(n)$ dapat ditulis secara berurut sebagai berikut $3, 4, \dots, 2n+2$. Karena $2n+2$ adalah bobot terbesar dari graf $DHF(n)$ maka terdapat pelabelan-λ pada $DHF(n)$ sedemikian sehingga $wt(e_E) = \lambda(v_{j-1}) + \lambda(e_E) + \lambda(v_j) = 2n+2$, dimana v_{j-1}, v_j bertetangga dengan e_E. Maka sedikitnya terdapat satu diantara $\lambda(v_{j1}), \lambda(v_j)$, atau $\lambda(e_E)$ dengan nilai lebih besar atau sama dengan $\left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$, misal $\lambda(e_E) \geq \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$, ini menunjukkan bahwa

$$tes\big(DHF(n)\big) \geq \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil \qquad \dots (1)$$

Tahap 2: Membuktikan bahwa $tes\big(DHF(n)\big) \leq \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$

Bukti : Untuk membuktikan hal tersebut akan dikonstruksi suatu pelabelan total tidak teratur sisi pada $DHF(n)$. Sebelumnya, telah didefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi graf $DHF(n)$. Misalkan $k = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$.

*Penulis koresponden

windasari222@gmail.com

Untuk kontruksi pelabelan yang dimaksud akan dibagi ke dalan 2 kasus.

a. Menentukan label titik

1. Untuk titik *u*
   - Untuk $4 \leq n \leq 10$

     $\lambda(u) = n - 3$
   - Untuk $n \geq 11$

     $\lambda(u) = k$
2. Untuk titik *w* dengan $n \geq 4$

   $\lambda(w) = k$
3. Untuk titik v_i, dimana $1 \leq i \leq n$
   - Untuk $n = 4$

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ k-1, & i = 2,3 \\ k-2, & i = 4 \end{cases}$$

   - Untuk $n \geq 5$

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & 1 \leq i \leq n-3 \; dan \; i \; ganjil \\ \frac{i}{2}, & 2 \leq i \leq n-3 \; dan \; i \; genap \\ k, & n-2 \leq i \leq n-1 \\ k-1, & i = n \end{cases}$$

b. Menentukan label sisi

1. Untuk sisi $v_i u$, dimana $1 \leq i \leq n-3$
   - Untuk $4 \leq n \leq 10$

$$\lambda(v_i u) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ \frac{i-1}{2} + 2, & 3 \leq i \leq n-3 \; dan \; i \; ganjil \\ \frac{i}{2} + 2, & 2 \leq i \leq n-3 \; dan \; i \; genap \end{cases}$$

   - Untuk $n \geq 11$

$$\lambda(v_i u) = \begin{cases} (n-2) - k, & i = 1 \\ \big((n-2) - k\big) + \left(\frac{i-1}{2} + 1\right), & 3 \leq i \leq n-3 \; dan \; i \; ganjil \\ \big((n-2) - k\big) + \left(\frac{i}{2} + 1\right), & 2 \leq i \leq n-3 \; dan \; i \; genap \end{cases}$$

2. Untuk sisi $v_i v_{i+1}$, dimana $1 \leq i \leq n-1$

$$\lambda(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-4 \\ (2i+3) - \left(k + \frac{i+1}{2}\right), & i = n-3 \; dan \; i \; ganjil \\ (2i+3) - \left(k + \frac{i}{2}\right), & i = n-3 \; dan \; i \; genap \\ (2n-1) - 2k, & n-2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

3. Untuk sisi $v_n v_1$
   - Untuk $n = 4$

     $\lambda(v_n v_1) = 1$
   - Untuk $n \geq 5$

     $\lambda(v_n v_1) = n - k$

*Penulis koresponden

windasari222@gmail.com

4. Untuk sisi $v_i w$, dimana $n-2 \leq i \leq n$
   - Untuk $n = 4$

$$\lambda(v_i w) = \begin{cases} 3, & i = 2 \\ 2, & i = 3, 4 \end{cases}$$

   - Untuk $n \geq 5$

$$\lambda(v_i w) = \begin{cases} 2n + 2 - 2k, & i = n - 2 \\ 2n + 1 - 2k, & n - 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Selanjutnya bobot setiap sisi berbeda

1. Untuk sisi $v_i u$, dimana $1 \leq i \leq n-3$
   - Untuk $4 \leq n \leq 10$ dan $i = 1$

$$\begin{aligned} wt(v_i u) &= \lambda(v_i) + \lambda(v_i u) + \lambda(u) \\ &= 1 + 1 + n - 3 \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

   - Untuk $n \geq 11$ dan $i = 1$

$$\begin{aligned} wt(v_i u) &= \lambda(v_i) + \lambda(v_i u) + \lambda(u) \\ &= 1 + (n - 2 - k) + k \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

   - Untuk $n \geq 4$ dan $2 \leq i < n - 3$ $dimana\ i\ genap$

$$\begin{aligned} wt(v_i u) &= \lambda(v_i) + \lambda(v_i u) + \lambda(u) \\ &= \frac{i}{2} + \left(\frac{i}{2} + 2\right) + (n - 3) \\ &= i + n - 1 \end{aligned}$$

   - Untuk $n \geq 4$ dan $3 \leq i < n - 3$ $dimana\ i\ ganjil$

$$\begin{aligned} wt(v_i u) &= \lambda(v_i) + \lambda(v_i u) + \lambda(u) \\ &= \frac{i+1}{2} + \left(\frac{i+1}{2} + 2\right) + (n - 3) \\ &= i + n - 1 \end{aligned}$$

2. Untuk sisi $v_i v_{i+1}$, dimana $1 \leq i \leq n-1$
   - Untuk $n = 4$

$$\begin{aligned} wt(v_1 v_2) &= \lambda(v_1) + \lambda(v_2) + \lambda(v_1 v_2) \\ &= 1 + (k - 1) + 1 \\ &= k + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} wt(v_2 v_3) &= \lambda(v_2) + \lambda(v_3) + \lambda(v_2 v_3) \\ &= (k - 1) + (k - 1) + 1 \\ &= 2k - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} wt(v_3 v_4) &= \lambda(v_3) + \lambda(v_4) + \lambda(v_3 v_4) \\ &= (k - 1) + (k - 2) + 1 \\ &= 2k - 2 \end{aligned}$$

*Penulis koresponden

windasari222@gmail.com

- Untuk $n \geq 5$ dan $1 \leq i \leq n-4$

$$wt(v_i v_{i+1}) = \lambda(v_i) + \lambda(v_{i+1}) + \lambda(v_i v_{i+1})$$
$$= \frac{i+1}{2} + \frac{i+1}{2} + 1$$
$$= i + 2$$

- Untuk $n \geq 5$ dan $i = n - 3$ $dimana\ i\ ganjil$

$$wt(v_i v_{i+1}) = \lambda(v_i) + \lambda(v_{i+1}) + \lambda(v_i v_{i+1})$$
$$= \frac{i+1}{2} + k + \left((2i+3) - \left(k + \frac{i+1}{2}\right)\right)$$
$$= 2i + 3$$

- Untuk $n \geq 5$ dan $i = n - 3$ $dimana\ i\ genap$

$$wt(v_i v_{i+1}) = \lambda(v_i) + \lambda(v_{i+1}) + \lambda(v_i v_{i+1})$$
$$= \frac{i}{2} + k + \left((2i+3) - \left(k + \frac{i}{2}\right)\right)$$
$$= 2i + 3$$

- Untuk $n \geq 5$ dan $i = n - 2$

$$wt(v_i v_{i+1}) = \lambda(v_i) + \lambda(v_{i+1}) + \lambda(v_i v_{i+1})$$
$$= k + k + (2n - 1 - 2k)$$
$$= 2n - 1$$

- Untuk $n \geq 5$ dan $i = n - 1$

$$wt(v_i v_{i+1}) = \lambda(v_i) + \lambda(v_{i+1}) + \lambda(v_i v_{i+1})$$
$$= k + (k-1) + (2n - 1 - 2k)$$
$$= 2n - 2$$

3. Untuk sisi $v_n v_1$
   - Untuk $n = 4$

$$wt(v_n v_1) = \lambda(v_i) + \lambda(v_1) + \lambda(v_n v_1)$$
$$= (k-2) + 1 + 1$$
$$= k$$

   - Untuk $n \geq 5$

$$wt(v_n v_1) = \lambda(v_i) + \lambda(v_1) + \lambda(v_n v_1)$$
$$= (k-1) + 1 + (n-k)$$
$$= n$$

4. Untuk sisi $v_i w$, dimana $n - 2 \leq i \leq n$
   - Untuk $n \geq 4$ dan $i = n - 2$

$$wt(v_i w) = \lambda(v_i) + \lambda(w) + \lambda(v_i w)$$
$$= k + \big((2n+2) - 2k\big) + k$$
$$= 2n + 2$$

   - Untuk $n \geq 4$ dan $i = n - 1$

$$wt(v_i w) = \lambda(v_i) + \lambda(w) + \lambda(v_i w)$$
$$= k + \big((2n+1) - 2k\big) + k$$
$$= 2n - 1$$

*Penulis koresponden

windasari222@gmail.com

- Untuk $n \geq 4$ dan $i = n$

$$
\begin{aligned}
wt(v_i w) &= \lambda(v_i) + \lambda(w) + \lambda(v_i w) \\
&= (k-1) + \big((2n+1) - 2k\big) + k \\
&= 2n
\end{aligned}
$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label terbesar yang digunakan adalah k. Berdasarkan fungsi pelabelan total yang didefinisikan sebelumnya diperoleh bahwa :

1. Untuk $4 \leq n \leq 10$, maka
   $\lambda(u) = n - 3 < k$
2. Untuk $n \geq 11$, maka
   $\lambda(u) = k$
3. Untuk $n \geq 4$, maka
   $\lambda(w) = k$
4. Untuk $n = 4$ dan $i = 1$, maka
   $\lambda(v_i) = 1 < k$
5. Untuk $n = 4$ dan $i = 2, 3$, maka
   $\lambda(v_i) = k - 1 < k$
6. Untuk $n = 4$ dan $i = 4$, maka
   $\lambda(v_i) = k - 2 < k$
7. Untuk $n \geq 5$, $i\ ganjil\ dan\ 1 \leq i \leq n - 3$, maka
   $\lambda(v_i) = \frac{i+1}{2} < k$
8. Untuk $n \geq 5$, $i\ genap\ dan\ 2 \leq i \leq n - 3$, maka
   $\lambda(v_i) = \frac{i}{2} < k$
9. Untuk $n \geq 5$ dan $n - 2 \leq i \leq n - 1$, maka
   $\lambda(v_i) = k$
10. Untuk $n \geq 5$, $i = n$, maka
    $\lambda(v_i) = k - 1 < k$
11. Untuk $4 \leq n \leq 10$ dan $i = 1$, maka
    $\lambda(v_i u) = 1 < k$
12. Untuk $4 \leq n \leq 10$, $i\ ganjil\ dan\ 3 \leq i \leq n - 3$, maka
    $\lambda(v_i u) = \frac{i-1}{2} + 2 < k$
13. Untuk $4 \leq n \leq 10$, $i\ genap\ dan\ 2 \leq i \leq n - 3$, maka
    $\lambda(v_i u) = \frac{i}{2} + 2 < k$
14. Untuk $n \geq 11$ dan $i = 1$, maka
    $\lambda(v_i u) = n - 2 - k < k$
15. Untuk $n \geq 11$, $i\ ganjil\ dan\ 3 \leq i \leq n - 3$, maka
    $\lambda(v_i u) = n - 1 - k + \frac{i-1}{2} < k$
16. Untuk $n \geq 11$, $i\ genap\ dan\ 2 \leq i \leq n - 3$, maka
    $\lambda(v_i u) = n - 1 - k + \frac{i}{2} < k$
17. Untuk $n \geq 4$ dan $1 \leq i \leq n - 4$, maka
    $\lambda(v_i v_{i+1}) = 1 < k$
18. Untuk $n \geq 4$, $i\ ganjil\ dan\ i = n - 3$, maka
    $\lambda(v_i v_{i+1}) = (2i + 3) - \left(k + \frac{i+1}{2}\right) \leq k$
19. Untuk $n \geq 4$, $i\ genap\ dan\ i = n - 3$, maka
    $\lambda(v_i v_{i+1}) = (2i + 3) - \left(k + \frac{i}{2}\right) \leq k$
20. Untuk $n \geq 4$ dan $n - 2 \leq i \leq n - 1$, maka
    $\lambda(v_i v_{i+1}) = (2n - 1) - k < k$
21. Untuk $n = 4$, maka
    $\lambda(v_n v_1) = 1 < k$
22. Untuk $n \geq 5$, maka
    $\lambda(v_n u) = n - k < k$
23. Untuk $n = 4$ dan $i = n - 2$, maka
    $\lambda(v_i w) = 3 < k$
24. Untuk $n = 4$ dan $n - 1 \leq i \leq n$, maka
    $\lambda(v_i w) = 2 < k$
25. Untuk $n \geq 5$ dan $i = n - 2$, maka
    $\lambda(v_i w) = (2n + 2) - 2k \leq k$
26. Untuk $n \geq 5$ dan $n - 1 \leq i \leq n$, maka
    $\lambda(v_i w) = (2n + 1) - 2k < k$

*Penulis koresponden

windasari222@gmail.com

Dari fungsi pelabelan di atas dapat dilihat bahwa tidak ada label yang lebih besar dari k. Karena itu $DHF(n)$ memiliki suatu pelabelan-k total tidak teratur sisi, dimana $k = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$.

Dengan demikian, diperoleh

$$tes\big(DHF(n)\big) \leq \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil \qquad \ldots (2)$$

Dari Persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$tes\big(DHF(n)\big) \geq \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$$

dan

$$tes\big(DHF(n)\big) \leq \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$$

Jadi, $tes\big(DHF(n)\big) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ahmad, A., Siddiqui, M.K., Afzal, D., *On The Total Edge Irregularity Strenght of Zigzag Graphs,* (2012) 141-149.
[2] Al-Mushayt, O., Ahmad, A., *On The Total Edge Irregularity Strenght of Hexagonal Grid Graphs,* 53 (2012) 263-271.
[3] Bača, M., Jendrol, S., Miller, M., Ryan, J., *On Irregularity Total Labellings,* 307 (2007) 1378-1388.
[4] Handayani, D., *Pelabelan-k Total Tak Teratur Sisi dan Nilai Ketakteraturan Total Sisi dari Graf Lintang,* Universitas Sebelas Maret, 2007.
[5] Jendrol, S., Miskuf, J., Sotak, R., *Total Edge Irregularity Strenght of Complete Graphs and Complete Bipartite Graphs,* 310 (2010) 400-407.
[6] Munir, R., (2012). *Matematika Diskrit,* Bandung: Penerbit Informatika.
[7] Rajasingh, I., Rajan, B., Annamma, V., *On The Total Vertex Irregularity Strenght of Cyle Related Graphs and H Graph*, 52 (2012) 32-37.
[8] Rajasingh, I., Rajan, B., Arockiamary, S.T., *Total Edge Irregularity Strenght of Butterfly Networks,* 3 (2012) 20-22.
[9] Siddiqui, M.K., *On Edge Irregularity Strenght of Subdivision of Star* S_n, 1 (2012) 75-82.

*Penulis koresponden

windasari222@gmail.com